

函数思想在解题中的应用

黄老师编辑

就中学数学而言，函数思想在解题中的应用主要表现在两个方面：一是借助有关初等函数的性质，解有关求值，解（证）不等式，解方程以及讨论参数的取值范围等问题，二是在问题的研究中，通过建立函数关系式或构造中间函数，把所研究的问题转化为讨论函数的有关性质，达到化难为易，化繁为简的目的

1、运用函数的单调性解题

单调性是函数的重要性质，某些数学问题，通过函数的单调性，可将函数值间的关系转化为为自变量间的关系进行研究，从而达到化繁为简的目的。特别是在比较数式大小，证明不等式，求值或最值，解方程（组）等方面应用十分广泛

例 1、已知 a, b, c 为正实数， $c < a + b$

$$\text{求证: } \frac{c}{c+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

例 2、式 $(x^2 - 20x + 38)^3 + 4x^2 + 152 < x^3 + 84x$

2、用函数的奇偶性、周期性解题

奇偶性是函数的又一重要性质，利用奇偶函数的对称性，常能使求解的问题避免复杂的讨论。利用函数的周期性使讨论的问题变成局部的问题

例 3、证明不等式 $\frac{x}{1-2^x} < \frac{x}{2} (x \neq 0)$

例 4、方程 $\sin x = \frac{x}{100}$ 的解的个数_____

3、用函数的值域解题

求函数的值域，涉及到众多的数学知识，构成了中学数学的重要横向知识体系，同时也为利用函数值域解题提供了广阔天地，尤其对某些参数的不等式，在分离参数的基础上，通过求函数的值域进而达到确定参数的取值范围，从而避免了对参数的繁琐讨论。

例 5、已知不等式 $1 \leq \cos^2 x + \sin x + a \leq \frac{17}{4}$ 对一切 $x \in R$ 恒成立，求 a 的取值范围。

4、用基本函数的性质解题

例 6、对于满足 $0 \leq p \leq 4$ 的一切实数，不等式 $x^2 + px > 4x + p - 3$ 恒成立，试求 x 的取值范围。

例 7、设 a, b, c 为绝对值小于 1 的实数，求证 $ab + bc + ca + 1 > 0$

例 8、已知 a 为正实数， $2c > a + b$ ，求证： $c^2 > ab$ ；

$$c - \sqrt{c^2 - ab} < a < c + \sqrt{c^2 - ab}$$

例 9、已知 $a, b, c, d \in R$ ，且满足 $a + b + c + d + e = 8$ ，

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16，\text{试确定 } e \text{ 的最大值。}$$

例 10、若 $a > 0, b > 0$ ，则不等式 $-b < \frac{1}{x} < a$ 等价于

A. $-\frac{1}{b} < x < 0$ 或 $0 < x < \frac{1}{a}$

B. $-\frac{1}{a} < x < \frac{1}{b}$

C. $x < -\frac{1}{a}$ 或 $x > \frac{1}{b}$

D. $x < -\frac{1}{b}$ 或 $x > \frac{1}{a}$

例 11、数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n - \sqrt{98}}{n - \sqrt{99}} (n \in N^*)$ ，则数列的 $\{a_n\}$ 前 30 项和中，最

大项和最小项分别为（ ）

A. a_{10}, a_9

B. a_1, a_9

C. a_1, a_{30}

D. a_9, a_{30}